# VERSCHIEDENE ZUGÄNGE ZUR DIFFERENTIALRECHNUNG

Manfred Kronfellner
Technische Universität Wien

## 1. VORBEMERKUNG

Zum Thema "Einführung in die Differentialrechnung"gibt es in der didaktischen Literatur eine derart große Zahl verschiedener Vorschläge wie kaum zu einem anderen Gebiet. Ein Grund dafür scheint mir in der Entwicklung der Schulmathematik seit der Lehrplanreform der 60er Jahre zu liegen. Neben inhaltlichen Umgestaltungen der Lehrpläne sollte auch das Streben nach mehr Exaktheit in den Vordergrund gestellt werden. Verständlicherweise war gerade auf diesem Gebiet die Universitätsmathematik das nächstliegende Vorbild.

In der Differentialrechnung ging man - wie eben in der Universitätsmathematik (meist) üblich - daran, vor der Einführung des Differentialquotienten das dafür notwendige begriffliche Instrumentarium zu erarbeiten, allem voran die Begriffe "Grenzwert von Funktionen" und "Stetigkeit".

In der Schulpraxis war man aber mit der Schwierigkeit konfrontiert, daß die in der (Universitäts)Mathematik verwendete Methode der Zurückführung von Begriffen auf möglichst wenige (und möglichst bequem definierbare) Grundbegriffe bei den Schülern - zumindest nicht automatisch - mehr Klarheit und bessere Einsicht brachten. Eine intensive didaktische Aufbereitung (insbesondere beim Einstieg in ein neues Gebiet) und ein nicht zu übersehender Aufwand an Unterrichtszeit erwies sich meist als unumgänglich notwendig.

Der erhöhte Zeitaufwand für die Darbietung der Theorie stellt eine gewisse "Durststrecke" bis zu den Anwendungsaufgaben dar, an den der Schüler Fertigkeiten lernen und üben kann, deren Überprüfung in vielen Fällen zur Leistungsbeurteilung herangezogen wird.

Die Notwendigkeit der intensiven didaktischen Aufbereitung sowie die erwähnte Durststrecke führten m.E. zu dem Bestreben, denk- und zeitökonomische Zugänge zur Differentialrechnung bei gleichzeitiger Erfüllung der üblichen Exaktheitsansprüche zu entwickeln.

## 2. VERSCHIEDENE ZUGÄNGE ZUR DIFFERENTIALRECHNUNG

Die in der didaktischen Literatur zu diesem Thema vorgestellten Konzepte lassen sich (mehr oder weniger) in folgende Gruppen einordnen:

2.1 Grenzwert von Sekantensteigungen
2.2 Änderungsraten
2.3 Stetige Fortsetzung
2.4 Lineare Approximation
2.5 Lipschitz-Analysis ("Karcher-Analysis")
2.6 Grenzwertfreie Zugänge

Wie wir noch sehen werden, gibt es auch Konzepte, die in mehrere Kategorien eingeordnet werden können. Dies liegt vor allem daran, daß verschiedene Gesichtspunkte als Einteilungskriterien verwendet wurden. Während zwischen 2.1 und 2.2 "nur" ein didaktischer Unterschied besteht, gibt es zwischen den übrigen auch mathematische Unterschiede.

Konsequenterweise sollte - wenn schon in den angeführten Kategorien der Grenzwertbegriff auftritt - auch über die Möglichkeiten seiner Einführung gesprochen werden. Eine erschöpfende Behandlung würde aber den Rahmen sprengen, sodaß auf diese Problematik nur am Rande eingegangen werden kann.

### 2.1 Grenzwert von Sekantensteigungen

Dieser Weg kann als der "klassische" Zugang zu den Grundbegriffen der Differentialrechnung bezeichnet werden. Er war vor der Reform des Mathematikunterrichts gewissermaßen "konkurrenzlos" und ist wohl allen bestens bekannt, weshalb auf eine Erörterung verzichtet wird (wenngleich auch innerhalb dieses Konzepts viele verschiedene didaktisch interessante Nuancen möglich sind!)

### 2.2 Änderungsraten

Obwohl der Zugang über Änderungsraten (vgl. BÜRGER-FISCHER-MALLE [1980]) mathematisch mit dem Zugang über den Grenzwert von Sekantensteigungen äquivalent ist, so besteht - didaktisch gesehen - der Unterschied darin, daß die Ableitung einer Funktion an einer Stelle primär als eine <u>Zahl</u> (und vorerst unabhängig von geometrischer Anschauung) gedeutet wird. Diese Zahl ist ein Maß für

Änderungen (Temperaturänderungen, Geschwindigkeit, Volumsänderungen, Stromstärke, Leistung,...) und wird als Grenzwert der mittleren Änderungsrate eingeführt.

*__Definition:__ Es sei $f:A \to B$ eine reelle Funktion, $a,b \in A$, $a<b$. Dann heißt*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

*die __mittlere Änderungsrate__ oder der __Differenzenquotient__ von $f$ in $[a,b]$.*
(A.a.O., S.18)

Darauf aufbauend wird nach einigen einführenden Aufgaben (Momentangeschwindigkeit, Volumsänderungsrate,...) definiert:

*__Definition:__ Es sei $f:x \to f(x)$ eine reelle Funktion. Der Grenzwert*

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

*heißt __Änderungsrate der Funktion f an der Stelle x__ oder __Differentialquotient von f an der Stelle x__.*
(A.a.O., S.26)

Erst nach dieser Definition wird die gegebene Funktion graphisch dargestellt und die mittlere Änderungsrate als Sekantensteigung, die Änderungsrate als Tangentensteigung gedeutet.
(A.a.O., S.29)

## 2.3 Stetige Fortsetzung

Während die beiden zuvor angegebenen Zugänge auch auf anschaulichem Niveau unterrichtet werden können, muß bei der Einführung der Ableitung mit Hilfe der stetigen Fortsetzung der Begriff der Stetigkeit bereits bekannt sein. Dann kann man im wesentlichen auf zwei Arten vorgehen:

a) Definition des Grenzwerts einer Funktion mit Hilfe der stetigen Fortsetzung und darauf aufbauend eine "klassische" Ableitungsdefinition als Grenzwert des Differenzenquotienten (der Differenzenquotientenfunktion).

b) Definition der Ableitung mit Hilfe der stetigen Fortsetzung. Die explizite Definition des Grenzwerts einer Funktion ist hierbei nicht notwendig.

ad a)

*Definition:* *a heißt Grenzwert der Funktion* $f:x\to f(x)$ *an der Stelle p, wenn die Funktion*

$$\bar{f}:x \to \begin{cases} f(x) & \text{für } x\neq p \\ a & \text{für } x=p \end{cases}$$

*an der Stelle p stetig ist.*

*Wir schreiben* $\lim\limits_{x\to p} f(x)=a$.

(Vgl. SZIRUCSEK-UNFRIED [1981], S.17)

Darauf aufbauend:

*Definition: Unter der 1. Ableitung einer Funktion f an der Stelle p versteht man den Grenzwert*

$$f'(p) = \lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$$

(A.a.O., S.36)

ad b) Man kann - wie gesagt - den Grenzwertbegriff auch umgehen und definieren:

*Definition: Es sei* $f:X\to Y|x\to f(x)$ *eine reelle Funktion und a ein Häufungspunkt von X. Die Funktion heißt differenzierbar (ableitbar) an der Stelle a, wenn die zugehörige Sekantensteigungsfunktion (Differenzenquotientenfunktion)*

$$k_a:X\setminus\{a\} \to R \mid x \to \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

*in die Stelle a stetig fortsetzbar ist.*

*Ist* $\bar{k}_a$ *die stetige Fortsetzung von* $k_a$ *in die Stelle a, so heißt der Funktionswert* $\bar{k}_a(a)$ *die Ableitung von f an der Stelle a (oder: Differentialquotient von f an der Stelle a) und wird mit* $f'(a)$ *bezeichnet:* $f'(a)=\bar{k}_a(a)$

(Vgl. LAUB [1980], S.126)

(Da diese Definition den Grenzwertbegriff vermeidet, könnte man dieses Konzept auch unter 2.6 "Grenzwertfreie Zugänge" einordnen.)

## 2.4 Lineare Approximation

Im Gegensatz zu den zuvor besprochenen Vorschlägen, die ja aus den österreichischen Lehrbüchern bekannt sind und nur der Vollständigkeit halber angeführt wurden, will ich auf den Zugang zur Differentialrechnung mit Hilfe des Konzepts der linearen Approximation etwas ausführlicher eingehen.

Bei der linearen Approximation wird eine (affin-) lineare Funktion $l:x \to kx+d$ gesucht, die eine gegebene Funktion f an einer Stelle a "möglichst gut" approximiert. D.h., es muß

1) $f(a) = l(a)$ sein, und
2) die Funktionswerte von l sollen sich in der Nähe von a möglichst wenig von den Funktionswerten von f unterscheiden.

Durch den Ansatz

$$l(x) = f(a)+k(x-a)$$

ist Punkt 1) für alle $k \in \mathbb{R}$ erfüllt. Um auch Punkt 2) zu genügen, muß k in geeigneter Weise gewählt werden. Dazu betrachten wir

$$f(x)-l(x) = f(x) - [f(a)+k(x-a)] =$$
$$= (x-a)\cdot[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - k] \qquad (*)$$

Wegen $(x-a) \to 0$ mit $x \to a$ folgt $f(x)-l(x) \to 0$ (für jedes k). Wählt man aber k so, daß $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \to k$ mit $x \to a$ geht, so strebt in (*) auch der zweite Klammerausdruck gegen Null, d.h., dann geht $f(x)-l(x)$ "am stärksten" gegen Null. Für dieses k stellt also l die bestmögliche lineare Approximation dar.

*Definition: Die lineare Funktion $l:x \to f(a)+k(x-a)$ heißt optimale lineare Näherung von f in a (oder "Tangente von f in a"), wenn gilt:*

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \to k \quad \text{für } x \to a$$

*Hat f in $a \in D_f$ eine optimale lineare Näherung, so heißt f in a differenzierbar.*

(Vgl. van BRIEL-NEVELING [1981], S.53, S.57 und S.60)

Durch Betrachtung des relativen Fehlers ergibt sich

$$f(x)-l(x)=(x-a)\cdot\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-k\right]$$

$$\frac{f(x)-l(x)}{x-a}=\underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-k}_{=:\ r_a(x)}$$

$$\Rightarrow f(x)-l(x) = r_a(x)\cdot(x-a)$$

$$\Rightarrow f(x)=l(x)+r_a(x)\cdot(x-a)$$

bzw.

$$f(x) = f(a)+k\cdot(x-a)+r_a(x)\cdot(x-a) \qquad (**)$$

Auf Grund dieser Überlegungen läßt sich die Differenzierbarkeit auch auf folgende Weise charakterisieren:

<u>*Satz:*</u> *f ist genau dann in a differenzierbar, wenn es ein $k\in\mathbb{R}$ und eine Funktion $r_a: x \rightarrow r_a(x)$ mit $r_a(x) \rightarrow 0$ für $x\rightarrow a$ gibt, sodaß sich $f(x)$ für $x\neq a$ darstellen läßt gemäß:*

$$f(x) = f(a)+k\cdot(x-a)+r_a(x)\cdot(x-a)$$

(A.a.O., S.72)

In dieser Formulierung tritt der Aspekt der linearen Approximation deutlich zutage:

$$f(x) = l(x) + r(x) \qquad (***)$$

wobei f die gegebene Funktion, l die approximierende lineare Funktion und r(x) der Fehler der Approximation ist, der der Bedingung

$$\frac{r(x)}{x-a} \rightarrow 0 \quad \text{für } x\rightarrow a$$

genügt.

(Man beachte, daß dem r(x) in (***)das Produkt $r_a(x).(x-a)$ in (**) entspricht!)

Ein gegenüber dem eben beschriebenen etwas modifiziertes Konzept erklärt zuerst, wann zwei beliebige Funktionen sich berühren: f wird als tangential zu g an der Stelle a bezeichnet, wenn

$$\lim_{x\rightarrow a}\frac{f(x)-g(x)}{x-a} = 0$$

Dadurch erhält man eine Klasseneinteilung der Funktionen. Eine Funktion f heißt differenzierbar an der Stelle a, wenn in der Äquivalenzklasse von f eine lineare Funktion existiert, d.h. wenn es eine lineare Funktion gibt, die an der Stelle a zu f tangential ist.
(Vgl. SCHRÖDER-UCHTMANN [1972], CARTAN [1967], DIEUDONNÉ [1960])

## 2.5 Lipschitz-Analysis

Der von KARCHER [1973] erstmals vorgestellte Lehrgang beruht darauf, daß man nicht mit der gesamten Menge der stetigen Funktionen arbeitet, sondern sich auf "gutartige" (= Lipschitz – stetige) Funktionen beschränkt.

*Definition:* *Eine Funktion f heißt gutartig auf* $[a,b]$, *wenn es eine Zahl L gibt, sodaß für alle* $x,y\in[a,b]$ *gilt:*

$$|f(x)-f(y)|\leq L\cdot|x-y|$$

(Wie man sofort erkennt ist jede gutartige Funktion stetig, d.h., es liegt eine Teilmenge der Menge der stetigen Funktionen vor.)

Entsprechend wird die Menge der differenzierbaren Funktionen auf die Menge der "gutartig differenzierbaren" Funktionen eingeschränkt:

*Definition:* *Eine auf* $[a,b]$ *definierte Funktion f heißt bei* $c\in[a,b]$ *gutartig differenzierbar mit der Steigung m, wenn es eine Zahl* $K\geq 0$ *gibt, sodaß für alle* $x\in[a,b]$ *gilt:*

$$|f(x)-f(c)-m(x-c)|\leq K\cdot(x-c)^2$$

(Diese Ungleichung ist die nennerfreie – und somit auch in x=c definierte – Form von

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-m\right|\leq K\,.\,|x-c|\,.)$$

## 2.6 Grenzwertfreie Zugänge

Beispiele für Zugänge, die den Grenzwertbegriff umgehen, haben wir bereits in 2.3 und 2.5 kennengelernt. Auch beim Zugang über die lineare Approximation läßt sich der Grenzwert umgehen, wenn man in

$$f(x) = f(a) + k.(x-a) + r_a(x).(x-a)$$

die Fehlerfunktion $r_a$ an der Stelle a als stetig voraussetzt. (Vgl. KROLL [1976], S 111).

Grenzwertfreie Zugänge tragen der Tatsache Rechnung, daß der dem Grenzwert innewohnende Gedanke des "unendlich Kleinen" bzw. "beliebig Kleinen" Schwierigkeiten bereitet. Durch die oben erwähten Zugänge wird dieses Problem weder gelöst noch vermieden, sondern nur verlagert (z.B. auf die Stetigkeit).

Ähnlich liegt der Fall bei der Nonstandard Analysis. Hier versucht man, durch eine geeignete Erweiterung der Menge der reellen Zahlen eine Rechtfertigungstheorie für Differentiale etwa im Sinne Eulers, also im Sinne von unendlich kleinen Größen $\neq 0$, zu entwickeln. Man konstruiert eine Menge $R^*=R\cup I$, ein Nonstandard-Modell der reellen Zahlen, indem man die Menge R der reellen Zahlen (im herkömmlichen Sinn) um eine Menge I von "infinitesimalen Zahlen" erweitert. Diese Erweiterung kann auf verschiedene Weise erfolgen, etwa mit dualen Zahlen oder mit Folgen (ähnlich der Vervollständigung von $\mathbb{R}$ mit Hilfe von Cauchyfolgen), läuft aber immer auf einen nichtarchimedisch geordneten Körper hinaus. Sobald nun die Menge $R^*$ vorliegt, kann der Grenzwertbegriff und die Ableitung relativ einfach eingeführt werden. (Der interessierte Leser sei auf die entsprechende Literatur, etwa LAUGWITZ [1973/74] oder TEMPLE [1934] verwiesen!)

Auch die folgenden Konzepte können nur kurz erwähnt werden:

D.LAUGWITZ [1973] versucht, den Grenzwert durch ein axiomatisches Vorgehen zu umgehen, welches aber offensichtlich am Konzept der linearen Approximation (mit stetiger Fehlerfunktion) modelliert ist. Ausgehend von einer Klasse C von Funktionen ("Kontinuitätsklasse") definiert er: f heißt in x differenzierbar in bezug auf C, wenn es eine Funktion $\Delta\in C$ gibt, sodaß

$$f(x+h) = f(x) + h\cdot\Delta(h)$$

ist. $\Delta(0)=:f'(x)$ heißt Ableitung von f in x.

(Mit Hilfe der Kontinuitätsklasse C, die er aus elementaren Funktionen mit Hilfe der Grundrechnungsarten und der Verkettung konstruiert, - C ist also eine Teilmenge der Menge der stetigen Funktionen - umgeht Laugwitz die Definition der Stetigkeit.)

Eine weitere Möglichkeit eines Zugangs zur Differentialrechnung besteht darin, die algebraischen Eigenschaften des Differentialoperators $D:f \rightarrow Df=f'$ axiomatisch festzulegen:

$$D(f+g) = Df+Dg$$
$$D(a\cdot f) = a\cdot Df \qquad (a\in\mathbb{R})$$
$$D(f\cdot g) = Df\cdot g+f\cdot Dg$$
$$D\ id = 1$$

(Vgl. VOLLRATH [1968])

Im Gegensatz zu den bisher besprochenen grenzwertfreien Zugängen, die - trotz Umgehung des Grenzwertbegriffs - doch wohl eher der höheren Matheamtik zuzuordnen sind, könnte der von A.KIRSCH [1961] vorgeschlagene Weg bereits als Propädeutik der Differentialrechnung in der Mittelstufe behandelt werden. Er versucht, mit Hilfe der "Stützgeraden" einer konvexen Funktion auf geometrisch - anschaulichem Weg die Differenzierbarkeit dieser Funktion an einer bestimmten Stelle zu charakterisieren. Konvex bedeutet bei Kirsch:

1) der Definitionsbereich der Funktion ist ein Intervall und
2) der Graph der Funktion verläuft zwischen je zwei seiner Punkte nur oberhalb bzw. nur unterhalb der durch diese Punkte gegebenen Sehne.

*Es sei nun $y=k(x)$ eine konvexe Funktion und $x=x_o$ eine Stelle im Inneren ihres Definitionsbereichs J. Wir nennen $k(x)$ "glatt in $x_o$", wenn es im Kurvenpunkt $P=(x_o/k(x_o))$ genau eine "Stützgerade" gibt, d.h., wenn es genau eine lineare Funktion $l(x)=mx+n$ gibt mit den Eigenschaften $l(x_o)=k(x_o)$ und $l(x)\leq k(x)$ für alle x aus J (bzw. $l(x)\geq k(x)$ für alle x aus J).*

(KIRSCH [1961], S 96)

# 3. KRITERIEN FÜR DIE AUSWAHL bzw. KONSTRUKTION EINES ANALYSIS-LEHRGANGES

## 3.1 Technische Einfachheit

Das Streben nach technischer Einfachheit (unter Beibehaltung der üblichen Exaktheitsansprüche) war ein wesentliches Motiv bei der Entwicklung der Lipschitz-Analysis. In diesem Konzept werden die für den Schüler schwierigen Definitionen von Stetigkeit und Grenzwert (diese Schwierigkeit wird durch die Anzahl und die Reihenfolge der Quantoren erklärt) durch die technisch etwas einfacheren Begriffe "gutartig" und "gutartig differenzierbar" vermieden. Viele Beweise sind relativ einfach, was zum Teil auch auf der nennerfreien Form der Ableitungsdefinition

$$|f(x)-f(c)-m(x-c)| \leq K.(x-c)^2$$

beruht. (Letzteres Argument gilt dementsprechend auch für den Zugang über die lineare Approximation.)

## 3.2 Generalisierbarkeit

Dem Kriterium der Generalisierbarkeit, das insbesondere in der höheren Mathematik große Bedeutung besitzt, genügt eindeutig der Zugang über die lineare Approximation am ehesten. Dieses Konzept läßt sich in zwei Richtungen verallgemeinern:

a) Man kann

$$f(x) = f(a) + k\cdot(x-a) + r(x)\cdot(x-a)$$

als Approximation von f durch ein Taylorpolynom 1. Ordnung deuten und somit als Ausgangspunkt für die Approximation einer Funktion durch Taylorpolynome höherer Ordnung ansehen.

b) Der Gedanke der linearen Approximation liegt auch der auf M.Fréchet zurückgehenden Definition der Differenzierbarkeit in Banachräumen zugrunde:

*Definition: A,B seien Banachräume, $D\subseteq A$. $f:D\to B$ heißt in $p\in D$ differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung $L:A\to B$ gibt, sodaß*

$$f(x) = f(p) + L(x-p) + r(x)$$

*mit* $\lim\limits_{x\to p} \frac{\|r(x)\|_B}{\|x-p\|_A} = 0$ *gilt.*

Diese Definition ist selbst wieder Ausgangspunkt für weitere Verallgemeinerungen (Differentialrechnung in topologischen Vektorräumen, vgl. AVERBUKH-SMOLYANOV [1967] und [1968], oder Differentialrechnung in Intervallräumen, vgl. SCHRÖDER [1972]).

Die Bedeutung dieses Zugangs spiegelt sich auch in der Tatsache wider, daß in mehreren modernen Analysislehrbüchern statt "differenzierbar" der Terminus "linearisierbar" verwendet wird.

Unter dem Aspekt der Generalisierbarkeit könnte man die in Karchers Zugang vorgenommene Beschränkung auf eine kleinere Funktionenmenge als Nachteil empfinden. Diese Beschränkung selbst erscheint mir allerdings nicht prinzipiell als Manko. Der Begriff der Gutartigkeit ist - wie auch die Stetigkeit - eine Abgrenzungseigenschaft, die uns pathologische Funktionen "vom Leibe hält". Der Funktionsbegriff ist in gewisser Weise viel zu allgemein und läßt daher so "Ungetüme" wie überall stetige, nirgends differenzierbare Funktionen zu. Diese Funktionen zeigen aber gleichzeitig, daß auch der Stetigkeitsbegriff selbst zu allgemein ist; eine stärkere Abgrenzungseigenschaft wäre also durchaus - insbesondere für die Schulmathematik - wünschenswert. Auch in der Integralrechnung ist eine Beschränkung auf kleinere Funktionenmengen häufig anzutreffen (z.B. stückweise monotone Funktionen, Regelfunktionen).

Nicht die Einschränkung selbst empfinde ich als Nachteil, wohl aber, daß die Wurzelfunktion $f: x \to \sqrt{x}$ zwar in jedem Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}^+$, nicht aber in $[0,b]$ gutartig ist. (Gutartigkeit bedeutet ja, daß die Tangentensteigungen im gesamten Intervall beschränkt sind.) Dieses Manko versuchte zwar WIPPERMANN [1975] durch Verallgemeinerung der Gutartigkeit zur "w-Stetigkeit" zu reparieren, allerdings auf Kosten der Einführung eines weiteren Quantors und auch anderer Verkomplizierungen, was sich natürlich auf die technische Einfachheit, die den Karcher-Zugang auszeichnet, negativ auswirkt - von der Anschaulichkeit ganz zu schweigen.

Die Einschränkung auf gutartige Funktionen hat auch noch einen zweiten Nachteil. Wenn man - wie Karcher - die Definition der Stetigkeit als zu schwer erachtet und damit die Einführung des Begriffs "gutartig" rechtfertigt, so muß man konsequenterweise auch die Definition des Grenzwerts von Zahlenfolgen, die ja im Hinblick auf Anzahl und Reihenfolge der auftretenden Quantoren genauso schwer wie die Definition der Stetigkeit ist, entsprechend vereinfachen. Karcher führte daher einen neuen Konvergenzbegriff für Folgen ein, die "geometrische Konvergenz". (Vgl. KARCHER [1973], S.47 und S.49; MÖLLER [1979], S.313). Aber auch dieser Begriff ist -ähnlich wie der der Gutartigkeit - zu eng: die Folge $\langle\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ ist keine "geometrisch konvergente Nullfolge" im Sinne Karchers!

Nach diesen eher vom theoretischen Standpunkt interessanten Kriterien sollen nun für die Schulpraxis relevante Aspekte angeführt werden.

## 3.3. Anschaulichkeit

Unter dem Gesichtspunkt der Anschaulichkeit sollte m.E. die Ableitung als eine Zahl eingeführt werden (Änderungsrate), da diese Zahl unmittelbar als Geschwindigkeit, Stromstärke, Preisindex,... gedeutet werden kann. Erst in zweiter Linie, wenn nämlich die betrachtete Stelle variiert wird, wird diese Zahl zur (Ableitungs)Funktion. Dies entspricht auch in gewissem Sinne einem "natürlichen" (genetischen) Vorgehen.(Vgl. später!)

Beim Zugang über die lineare Approximation oder über die stetige Fortsetzung wird zuerst nach einer (linearen bzw. stetigen) Funktion gefragt. Um dann außermathematische Deutungen der Ableitung zu ermöglichen, ist man zu einem Rückschritt gezwungen, indem man die Steigung der linearen Funktion oder den Funktionswert der stetigen Fortsetzung an der betreffenden Stelle betrachtet.

Da eine Vielfalt von (außermathematischen) Anwendungen m.E. auch einen großen Beitrag zur Anschaulichkeit eines Begriffs leistet, sollte man die Einführung der Ableitung nicht allein mit dem Tangentenproblem motivieren, sondern im Anschluß an die außermathematisch motivierten Definitionen der mittleren und momentanen Änderungsrate Sekanten und Tangenten als innermathematische Veranschaulichungen anbieten (wie etwa in BÜRGER-FISCHER-MALLE [1980]).

Analoges gilt für die in 2.6 erwähnte Methode der Stützgeraden konvexer Funktionen.

## 3.4. Lernpsychologische Aspekte

Die in diesem Zusammenhang relevanten Kriterien sind im "genetischen Prinzip" zusammengefaßt, das u.a. auf der Entwicklungspsychologie J.Piagets beruht und in F.Klein, O.Toeplitz, H.Freudenthal, M.Wagenschein, J.S.Bruner - um nur einige zu nennen - prominente Befürworter gefunden hat.

Es kann - zwar grob, aber prägnant - so formuliert werden:

Mathematik genetisch zu unterrichten heißt, sie so zu unterrichten, wie sie wirklich ist.

Ausführlicher:

*Eine Darstellung einer mathematischen Theorie heißt genetisch, wenn sie an den natürlichen erkenntnistheoretischen Prozessen der Erschaffung und Anwendung von Mathematik ausgerichtet ist.*

(Vgl. WITTMANN [1975], S. 106 ff, bzw. WITTMANN [1980] S. 130 ff.)

Durch das genetische Prinzip, auf das hier nicht in allen Details eingegangen werden kann, kommen wir schließlich zu einem Aspekt, dessen Berücksichtigung und zwar vom Gesetz, in der Bildungs- und Lehraufgabe, vorgeschrieben ist, das aber m.E. in der Schule viel zu wenig zum Tragen kommt, nämlich die "*Vermittlung von Einsichten in die kulturgeschichtliche, sozial- und wirtschaftspolitische sowie wissenschaftstheoretische Bedeutung der Mathematik*" (BGBL [1978]).

## 3.5. Kulturgeschichtliche und wissenschaftstheoretische Aspekte

Während die Realisierung des genetischen Prinzips immer ein Hintergrundwissen über die Genese des jeweiligen Teilgebietes erfordert, eignet sich gerade die Entwicklung der Differentialrechnung sehr gut, im Rahmen des Unterrichts kulturgeschichtliche und wissenschaftstheoretische Aspekte der Mathematik explizit zur Sprache zu bringen.

Die Frage nach diesen Aspekten führt fast zwangsläufig auf die Frage:

Was ist Matheamtik?

Mathematik sollte dabei nicht als ein starres System von Regeln, Definitionen, Sätzen,.. verstanden werden. Mathematik sollte weiter gesehen werden, nämlich als ein dynamischer Prozeß, der permanent geprägt ist durch Vermutungen, vorläufige Begriffsbildungen, Widerlegungen, neue Anläufe, u.s.w. (Vgl. LAKATOS [1979]!)

Die deduktive Mathematik vieler Universitätsvorlesungen und Bücher ist nur eine ausgefeilte Formulierung des Endprodukts dieses Prozesses.

Folgende thesenhafte Ansätze sind geeignet, diese Sichtweise der Mathematik zu verdeutlichen und damit sowohl die kulturhistorischen und wissenschaftstheoretischen Aspekte näherzubringen als auch den durch das genetische Prinzip umschriebenen lernpsychologisch adäquaten Rahmen abzustecken.

Problemorientierung:
Aufzeigen von Begriffen, die sich als (mittlere bzw. momentane) Änderungsrate deuten lassen.

Wiederentdeckendes Lernen:
Einführung des Grenzwerts der mittleren Änderungsrate (Differenzenquotient) an der historischen Entwicklung modellieren (und diese kulturgeschichtlich interessante Entwicklung den Schülern auch explizit vor Augen führen!)

Spiralprinzip:
Mit anschaulichen Umschreibungen des Grenzwerts im Rahmen der Differentialrechnung mit Polynomfunktionen beginnen, Aufzeigen der begrenzten Verwendbarkeit dieses Grenzwertbegriffs bei anderen Funktionsklassen, Exaktifizierung dieses Begriffs, (etwa mit Hilfe des Grenzwerts von Folgen), damit Erweiterung des Anwendungsbereichs auf neue Klassen von Funktionen und Erhöhung der Sicherheit der Argumentation, Aufzeigen weiterer Exaktifizierungs- und Formalisierungsmöglichkeiten (lineare Approximation, stetige Fortsetzung)

Reflexion über diesen Prozeß (und über mathematische Begriffs- und Theoriebildung im allgemeinen): Aufzeigen, daß es verschiedene Möglichkeiten des Zugangs gibt, Demonstration der beschränkten Verwendbarkeit (vorläufiger) mathematischer Begriffsbildungen, Aufzeigen und Vergleichen verschiedener Wege der Exaktifizierung, Diskussion des Sinnes und der Vorteile wie auch der Nachteile exakterer Begriffsbildungen (mit höherem Grad an Exaktheit geht i.a. ein höherer Formalisierungsgrad und damit ein Verlust von heuristischem Wert des Begriffs einher!) Aufzeigen der Relativität des Exaktheitsniveaus (es gibt kein höchstes Exaktheitniveau, sondern nur ein adäquates bzw. nicht adäquates: beim Beweis von Sätzen wird ein höheres Niveau, bei Anwendungen eher ein niedrigeres adäquat sein); Herausarbeiten der fundamentalen Ideen des jeweiligen mathematischen Gebietes (in der Differentialrechnung etwa: Idee des unendlich Kleinen, Idee der lokalen Approximation, Idee der quantitativen Erfassung von Veränderungen, u.s.w.); ganz allgemein: Reden über Mathematik.

(Vgl. FISCHER-MALLE [1980], S 93ff, und FISCHER [1980]).

## 4. SCHLUSSBEMERKUNGEN

Oft wird die Meinung vertreten, bei neuen Inhalten oder Tendenzen, die gerade forciert werden, handelt es sich um Modeerscheinungen von nur kurzer Lebensdauer. Mag sein, daß dies auch für das genetische Prinzip, Spiralprinzip, induktives Vorgehen ... gilt. Ich glaube aber nicht, daß diese Ideen wieder ganz verschwinden werden. Ich glaube es deshalb nicht, da diese Entwicklung eine Reaktion auf die Probleme darstellt, die die "Neue Mathematik" mit ihrer Betonung des Formalen und Deduktiven mit sich brachte. Die mit dieser Reaktion eingetretene Tendenzwende ist etwa seit der Mitte der 70er Jahre zu bemerken, wo sie sich insbesondere in den Arbeiten von BLUM [1975] und FISCHER [1976] und [1978] niederschlägt. Seitdem sind auch schon mehrere Schulbücher verfaßt worden, die als Grundkonzept die Idee der Beschränkung auf naiv-anschauliche Begriffe mit nachträglicher Exaktifizierung haben (z.B. BÜRGER-FISCHER-MALLE [1980], van BRIEL-NEVELING [1981], LOHSE-WILLE [1981], KRONFELLNER-PESCHEK [1983], ATHEN-GRIESEL [1978]; im letztgenannten Buch werden sogar zwei Möglichkeiten der Exaktifizierung - mit Hilfe des Grenzwerts von Folgen und mit Hilfe der stetigen Fortsetzung - behandelt.)

Natürlich gab es auch vor 1975 Kritik an der "Neuen Mathematik" mit vielen z.T. markigen Zitaten. Ein inzwischen schon zum geflügelten Wort gewordenes Zitat von H.Freudenthal paßt für unsere

Diskussion der Sichtweise der Mathematik:

*"Ein Mathematiker ist gewöhnt zu objektivieren. Er publiziert nicht seine Gedankengänge, sondern seine objektivierende Bearbeitung: Definition, Satz, Beweis. Wenn er von den Überlegungen, die ihn zum Ziel führten, etwas veröffentlichte, käme er sich vor, als stände er in Unterhosen auf der Straße."*

(FREUDENTHAL [1963])

Ich halte es im Interesse der Schüler und der Mathematik wichtig, den Schülern nicht nur den "mathematischen Sonntagsanzug" zu präsentieren sondern auch die "mathematischen Unterhosen"!

LITERATUR


ATHEN, H.-GRIESEL,H: Mathematik heute
Grundkurs Analysis 1
Schroedel, Hannover-Dortmund-Darmstadt-Berlin; Schöningh, Paderborn 1978.

AVERBUKH, V.I.-SMOLYANOV, O.G.: The theory of differentiation in linear topological spaces
Russian mathematical surveys 22(6) (1967), S 201-260.

AVERBUKH,V.I.-SMOLYANOV,O.G.:
The various definitions of the derivative in linear topological spaces
Russian mathematical surveys 23(4) (1968), S 67-113.

BLUM,W.: Ein Grundkurs in Analysis
Didaktik der Mathematik 3 (1975), S 163-184

van BRIEL, W.-NEVELING,R.: Grundkurs Analysis
Bayrischer Schulbuchverlag, München 1981

BUNDESGESETZBLATT für die Republik Österreich; Jahrgang 1978 vom 28. Februar 1978, 31.Stück, 114.Verordnung

BÜRGER,H.-FISCHER, R.- MALLE,G.:
Mathematik Oberstufe 3,
Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1980

CARTAN, H.: Calcul différentiel
Hermann, Paris 1967

DIEUDONNÉ, J.: Foundation of modern Analysis
Academic Press, New York, London 1960

FISCHER, R.: Fundamentale Ideen bei den reellen Funktionen
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 8 (1976), Heft 4, S 185-193

FISCHER, R.: Die Rolle des Exaktifizierens im Analysisunterricht
Didaktik der Mathematik 6 (1978) S 212-226

FISCHER, R.: Didaktische Fragen zur Differentialrechnung
Skriptum zur Lehrerfortbildung, Universität für Bildungswissenschaften, Klagenfurt 1980

FISCHER,R.-MALLE,G.: Fachdidaktik Mathematik
Pädagogik für Lehrer an höheren Schulen, herausgegeben von M.Heitger, Inst.f.Erziehungswissenschaften an der Univ.Wien, 1980.

FREUDENTHAL, H.: Was ist Axiomatik und welchen Bildungswert kann sie haben?
Der Mathematikunterricht 9 (1963) Heft 4, S 5-29

KARCHER, H.: Analysis auf der Schule
Didaktik der Mathematik 1 (1973), Heft 1, S 46-69

KIRSCH, A.: Eine geometrische Charakterisierung der "Differenzierbarkeit" einer Funktion
Math.-physik. Semesterberichte 7 (1961), S 96-100

KROLL, W.: Differentialrechnung
Dümmler, Bonn 1976

KRONFELLNER, M.-PESCHEK, W.: Angewandte Mathematik 3
Lehrbuch für Handesakademien
Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1983
(im Druck)

LAKATOS, I: Beweise und Widerlegungen (Die Logik mathematischer Entdeckungen) Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden 1979

LAUB,J.: Lehrbuch der Mathematik, 3.Band
Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1980

LAUGWITZ,D.: Ist Differentialrechnung ohne Grenzwertbegriff möglich?
Mathematisch-physikalische Semesterberichte 20 (1973), S 189-201

LAUGWITZ, D.: Ein Weg zur nonstandard Analysis
Jahresberichte der deutschen Mathematikervereinigung 75 (1973/74), S 66-92.

LOHSE,D.-WILLE,D.: Grundkurs Analysis 1
Einführung in die Differentialrechnung
W. Girardet, Essen 1981

MÖLLER,H.: Vereinfachte Analysis
in: D.Volk (Hrsg.): Kritische Stichwörter - Mathematikunterricht, S 309-322, Verlag W.Fink, München 1979

SCHRÖDER,G.: Differentiation on intervalfunctions
Proc.AMS 36 (1972), S 485-490

SCHRÖDER, H.-UCHTMANN,H.(Hrsg.):
Einführung in die Mathematik - Analysis
Diesterweg, Frankfurt-Berlin-München 1973

SZIRUCSEK,E.-UNFRIED,H.: Mathematik 7/2
Ueberreuter, Wien 1980

TEMPLE, G.: Differentials
The mathematical gazette 18(1934), S 68-79

VOLLRATH,H.-J.: Some algebraic aspects in analysis teaching
Educational Studies in Mathematics 1 (1968/69), S 440-444

WIPPERMANN,H.: Über die Definition eines Stetigkeitsbegriffes mit Hilfe von Wurzelfunktionen
Didaktik der Mathematik 3(1975), S 29-35

WITTMANN, E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts
Verlag Vieweg, Braunschweig, 3. Auflage (1975) bzw. 6. Auflage (1981)